

# Mathematik

## Serie A - Lösungen

Prüfungsdauer: 120 Minuten

Max. Punktezahl: 100 Punkte

### Bewertungshinweise:

Mehrfachlösungen sind nicht gestattet.

Als Resultate gelten nur eindeutig gekennzeichnete Zahlen, Mengen oder Sätze.

Die Diagramme müssen korrekt beschriftet sein.

Bei fehlenden Antwortsätzen oder Lösungsmengen werden Punkte abgezogen.

Bei den einzelnen Ausrechnungsteilschritten gilt allgemein:

1. Fehler: Abzug von 50 % der maximalen Punktzahl dieses Teilschritts

2. Fehler: 0 Punkte für diesen Teilschritt

Es gibt keine halben Punkte.

Ist bei grafischen Lösungen die zugrunde liegende Funktionsgleichung falsch, diese falsche Funktion jedoch korrekt gezeichnet, müssen die Punkte für die grafische Darstellung gegeben werden.

Als Grundlage gilt das Dokument „Mathematik: Hinweise zur Lösungsdarstellung“ vom Juni 2023, KKB Kanton Zürich.

Dieser Lösungs- und Bewertungsschlüssel darf nur von Mathematik-Lehrenden kaufmännischer Berufsschulen verwendet werden. Insbesondere darf er in späteren Jahren im Unterricht zu Übungszwecken nicht 1:1 kopiert und an Lernende abgegeben werden. Jede weitere Verwendung der Originalprüfung wie auch dieses Schlüssels bedarf der Bewilligung der Kommission Kaufmännische Berufsmatura, Kt. ZH. Kommerzielle Verwendung - auch nur auszugsweise - bleibt untersagt.

### Notenskala

Punkte	0 – 4	5 – 14	15 – 24	25 – 34	35 – 44	45 – 54	55 – 64	65 – 74	75 – 84	85 – 94	95 – 100
Note	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6

## Aufgabe 1

6 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmenge für folgende Gleichung. ( $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ )

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{2}$$

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$		1
$2(x+1)(x-1) = 2x^2 - x(x-1)$		1
$2x^2 - 2 = 2x^2 - x^2 + x$		
$x^2 - x - 2 = 0$		2
$x_1 = -1 \quad x_2 = 2$		1, 1
$\mathbb{L} = \{-1; 2\}$		
Abzüge:	Fehlende oder nicht korrekte Lösungsmenge	-1

## Aufgabe 2

6 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmenge für folgendes Gleichungssystem.

( $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ )

$$(1) \quad \frac{x+3}{x} = \frac{y+2}{y-1}$$

$$(2) \quad \frac{y+2}{y} - \frac{x+1}{x-2} = 0$$

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D}_x = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\} \quad \mathbb{D}_y = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ oder $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\} \times \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$		1, 1
(1) $xy + 3y - x - 3 = xy + 2x$ (1) $-3x + 3y = 3$		1
(2) $xy + 2x - 2y - 4 = xy + y$ (2) $2x - 3y = 4$		1
$x = -7 \quad y = -6$ $\mathbb{L} = \{(-7; -6)\}$		1, 1
Abzüge:	Fehlende oder nicht korrekte Lösungsmenge	-1

### Aufgabe 3

12 Punkte

- a) Eine Druckmaschine hat nach 7 Jahren mit einer degressiven Abschreibung von 22 % pro Jahr einen Buchwert von CHF 29'334.50 erreicht.

Wie hoch war der Kaufpreis der Maschine?

(3)

Lösungsdetails		Punkte
$K_0 = \frac{K_n}{\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n} = \frac{29'334.5}{\left(1 - \frac{22}{100}\right)^7}$		2
$K_0 = 167'000.00$		1
Die Maschine wurde zu einem Preis von CHF 167'000.00 gekauft.		
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	-1

- b) Mit welchem Abschreibungssatz wurde eine Maschine abgeschrieben, wenn ihr Buchwert nach 7 Jahren noch einen Viertel des Anschaffungswertes beträgt?  
Runden Sie auf ganze Prozente.

(3)

Lösungsdetails		Punkte
$\frac{1}{4} = q^7$		1
$q = \sqrt[7]{\frac{1}{4}} = 0.820335..$		1
$p = 17.966 \dots$		1
Der Abschreibungssatz betrug 18 %.		
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	-1
	Falsche oder fehlende Rundung	-1

- c) Die Maschine wird zum Buchwert von CHF 29'334.50 verkauft. Dieser Betrag wird zu 2.9 % angelegt. Nach wie vielen ganzen Jahren ist das Kapital erstmals grösser als CHF 40'000.00?

(3)

Lösungsdetails		Punkte
$n = \frac{\log 40'000 - \log 29'334.5}{\log 1.029} = 10.85$		2,1
Nach 11 ganzen Jahren ist das Kapital erstmals grösser als CHF 40'000.00.		
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	-1
	Falsche oder fehlende Rundung	-1

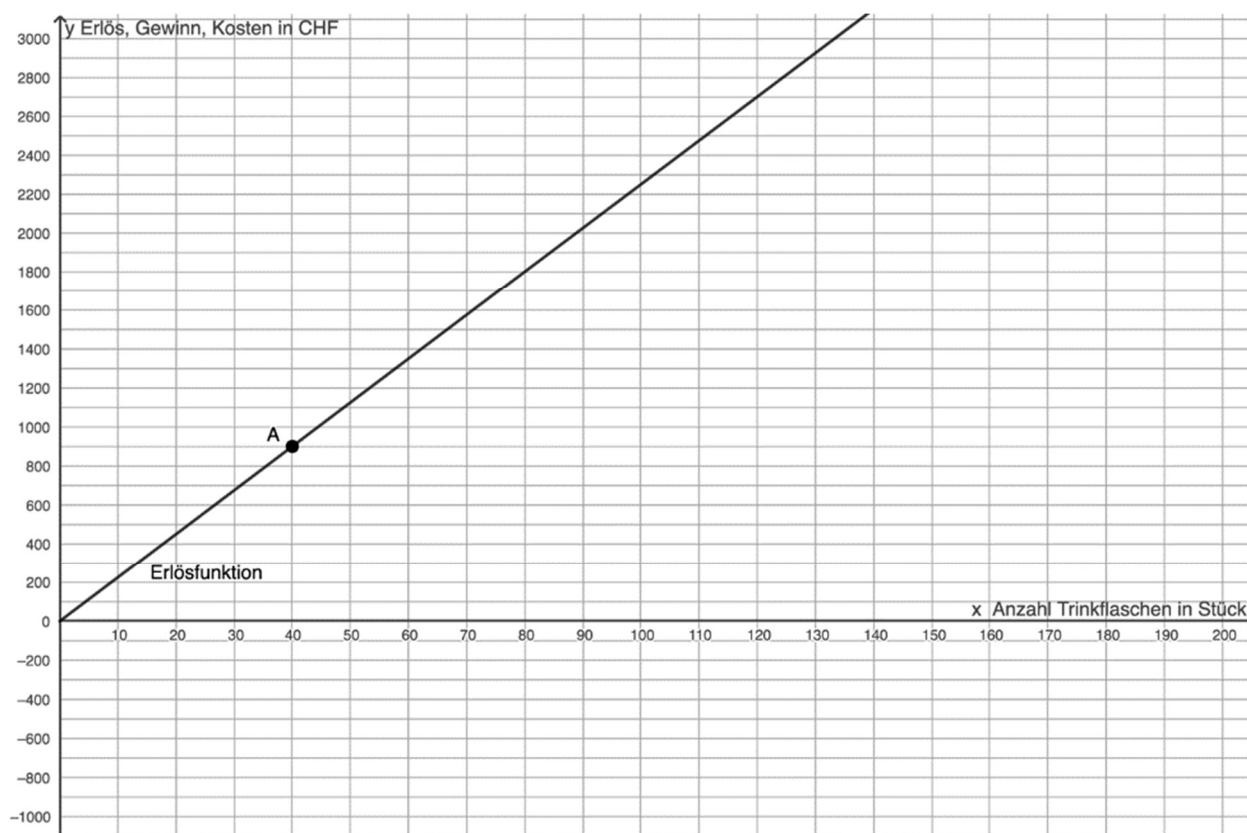
- d) Die Firmenleitung hat beschlossen für eine neue Maschine zu sparen. Welchen Betrag muss sie jeweils anfangs Jahr einzahlen, damit Sie nach 7 Jahren über einen Betrag von CHF 200'000.00 verfügen kann? Der Zinssatz beträgt 2.25 %. Runden Sie auf ganze Franken. (3)

Lösungsdetails		Punkte
$\bar{r} = \frac{\overline{R_n} \cdot (q - 1)}{q \cdot (q^n - 1)} = \frac{200'000 \cdot (1.0225 - 1)}{1.0225(1.0225^7 - 1)}$		2
$\bar{r} = 26'112.52$		1
<i>Sie müssen jeweils anfangs Jahr CHF 26'113.00 einzahlen.</i>		
Abzüge:	<i>Fehlender Antwortsatz</i>	-1
	<i>Falsche oder fehlende Rundung</i>	-1

## Aufgabe 4

10 Punkte

Ein Produktionsbetrieb für Trinkflaschen erzielt folgenden Erlös (siehe Grafik unten):



- a) Bestimmen Sie die Gleichung für die abgebildete Erlösfunktion.  
( $x$  = Anzahl Trinkflaschen in Stück,  $y$  = Erlös in CHF)

(1)

Lösungsdetails		Punkte
$y_E = 22.5x$		1
Abzüge:		

Die Firma rechnet bei der Herstellung mit Fixkosten von CHF 900.00, die Gewinnschwelle liegt bei 120 Flaschen.

- b) Zeichnen Sie die Gewinn- und die Kostenfunktion auch ins Koordinatensystem ein und markieren Sie die Gewinnschwelle.

(3)

Lösungsdetails		Punkte
		$y_G: 1$ $y_K: 1$ $GS: 1$
Abzüge:	Fehlende Beschriftungen	-1

- c) Formulieren Sie die Funktionsgleichungen für die Gewinn- und die Kostenfunktion. (4)

Lösungsdetails		Punkte	
$0 = m \cdot 120 - 900 \Rightarrow y_G = 7.5x - 900$		2	
$y_K = 15x + 900$		2	
Abzüge:			

- d) Bei der Produktion einer kleineren Trinkflasche wird bei einem Erlös von CHF 18.00 pro Flasche die Gewinnschwelle bei 95 Stück erreicht. Die variablen Kosten für diese Trinkflasche betragen CHF 10.50 pro Stück. Wie hoch sind in diesem Fall die Fixkosten? (2)

Lösungsdetails		Punkte
$18 \cdot 95 = 10.5 \cdot 95 + c$		1
$c = 712.50$		1
Die Fixkosten betragen CHF 712.50.		
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	-1

## Aufgabe 5

15 Punkte

Ein Fahrradgeschäft plant, zwei Arten von E-Bikes anzubieten: den Typ Slowly ( $x$ ) und den Typ Quickly ( $y$ ). Gesamthaft sollen höchstens 450 Stück eingekauft werden. Im Einkauf kostet der Typ Slowly CHF 1'200.00, der Typ Quickly CHF 3'200.00 pro E-Bike. Für den Kauf der E-Bikes stehen maximal CHF 960'000.00 zur Verfügung.

Es dürfen höchstens doppelt so viele E-Bikes vom Typ Slowly wie vom Typ Quickly beschafft werden. Die Anzahl E-Bikes vom Typ Slowly soll mindestens 40 % aller E-Bikes ausmachen.

Der Typ Slowly wird pro E-Bike zum Preis von CHF 3'200.00 verkauft, während ein E-Bike des Typs Quickly für CHF 6'100.00 erhältlich ist.

- a) Erstellen Sie dafür das lineare Programm und formulieren Sie die Zielfunktion für den maximalen Gewinn (**ohne Grafik**). (5)

Lösungsdetails		Punkte
$x = \text{Anzahl E.-Bikes Typ Slowly in Stk.}$ $y = \text{Anzahl E.-Bikes Typ Quickly in Stk.}$ $(x \geq 0, y \geq 0)$ $(1) \quad x + y \leq 450$ $(2) \quad 1'200x + 3'200y \leq 960'000$ $(3) \quad x \leq 2y$ $(4) \quad x \geq 0.4(x + y)$ <i>Zielfunktion:</i> $z_{\max} = 2'000x + 2'900y$		Je 1
Abzüge:		

- b) Auf Grund einer Marktforschung hat der Inhaber die Rahmenbedingungen angepasst. Daraus resultiert ein neues lineares Programm:

$$(1) \quad y \leq -x + 370$$

$$(2) \quad y \leq -0.5x + 300$$

$$(3) \quad y \geq \frac{1}{3}x$$

$$(4) \quad y \leq 3x$$

$$\text{i Zielfunktion: } z_{\max} = 2'250x + 3'000y$$



Zeichnen Sie das lineare Programm und die Zielfunktion in das vorgegebene Koordinatensystem ein.

(7)

Lösungsdetails	Punkte
	<p>(7)</p> <p>Pro Gerade 1P</p> <p>Lösungspolygon 1P</p> <p><math>z', z_{Max}</math> 1P</p> <p><math>P_{Max}</math> 1P</p>
<p>Abzüge: Fehlende Beschriftungen</p>	<p>max. -2</p>

- c) Wie viele E-Bikes des Typs Slowly und wie viele E-Bikes des Typs Quickly müssen eingekauft werden, damit der Gewinn maximal wird?

(2)

Lösungsdetails	Punkte
<p>(1) = (2)</p> $-x + 370 = -0.5x + 300$ $x = 140 \quad y = 230$ <p>Es müssen 140 Stück des Typs Slowly und 230 Stück des Typs Quickly eingekauft werden.</p>	<p>1, 1</p>
<p>Abzüge: Fehlender Antwortsatz</p>	<p>-1</p>

- d) Wie gross ist der maximale Gewinn?

(1)

Lösungsdetails	Punkte
$z = 2'250 \cdot 140 + 3'000 \cdot 230$ $z = 1'005'000$ <p>Der maximale Gewinn beträgt CHF 1'005'000.00.</p>	<p>1</p>
<p>Abzüge: Fehlender Antwortsatz</p>	<p>-1</p>

## Aufgabe 6

10 Punkte

Die Kostenfunktion eines Produktes lautet:  $y = 5x^2 - 500x + 10'000$ .

Das Produkt wird für CHF 100.00 pro Stück verkauft.

( $x$  = Menge in Stück,  $y$  = Gewinn / Kosten / Erlös in CHF)

a) Bestimmen Sie die Erlös- und die Gewinnfunktion. (2)

Lösungsdetails		Punkte
$y_E = 100x$ $y_G = -5x^2 + 600x - 10'000$		1, 1
Abzüge:		

b) Für welche Stückzahlen ist mit Gewinn zu rechnen? (2)

Lösungsdetails		Punkte
$0 = -5x^2 + 600x - 10'000$ $0 = -5(x - 20)(x - 100)$ $x_1 = 20$ $x_2 = 100$ <i>Zwischen 20 und 100 Stück ist mit Gewinn zu rechnen.</i>		1, 1
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	-1

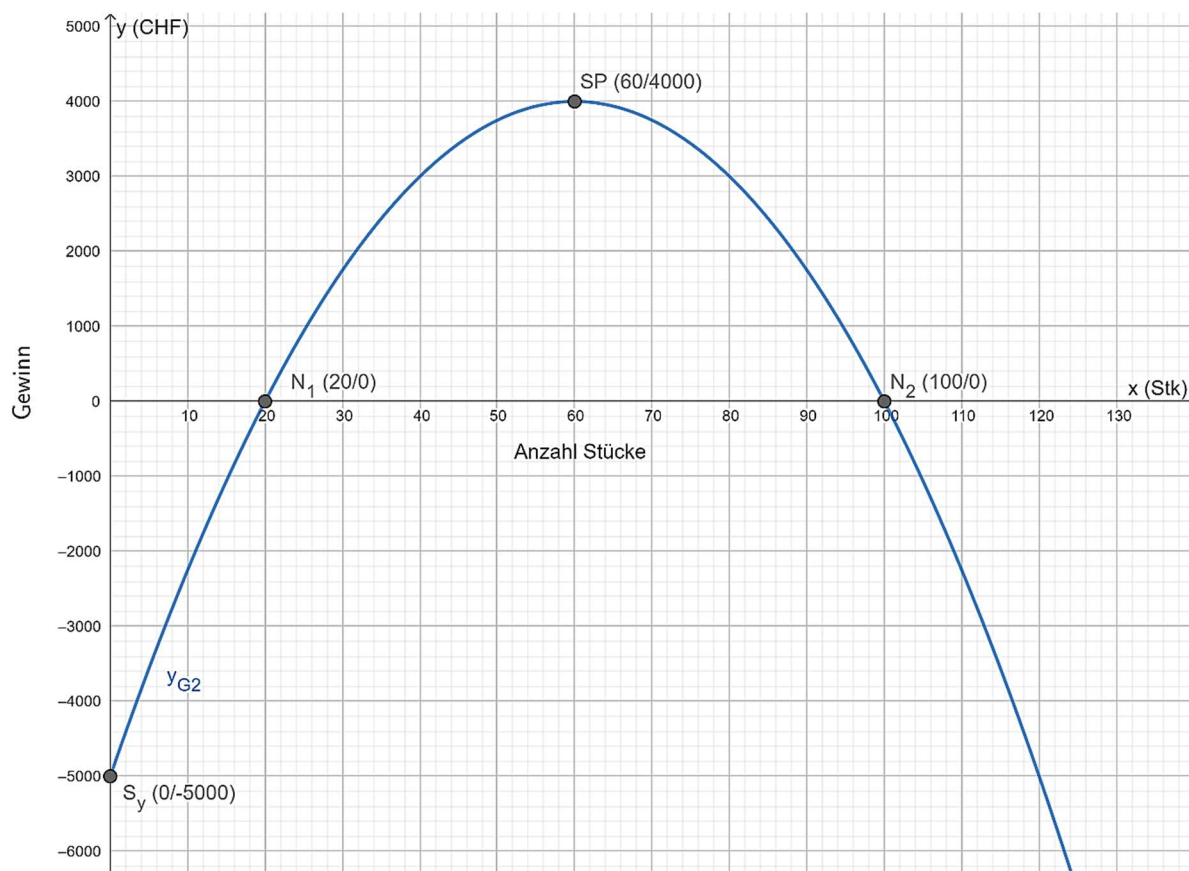
c) Bei welcher Stückzahl ist der Gewinn maximal? (1)

Lösungsdetails		Punkte
$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{20 + 100}{2} = 60$ oder $x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-600}{-10} = 60$ <i>Bei 60 Stück wird der maximale Gewinn erreicht.</i>		1
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	-1

d) Wie hoch ist der maximale Gewinn? (1)

Lösungsdetails		Punkte
$y_s = c - \frac{b^2}{4a} = -10'000 - \frac{360'000}{-20} = 8'000$ <i>Der maximale Gewinn beträgt CHF 8'000.00.</i>		1
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	-1

- e) Durch Umstrukturierungen hat sich die Gewinnfunktion verändert. Sie ist in der nachfolgenden Grafik dargestellt. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der neuen Gewinnfunktion. (4)



Lösungsdetails		Punkte
$y = a(x - 20)(x - 100)$		1
$-5'000 = a(0 - 20)(0 - 100)$		1
$-\frac{5}{2} = a$		1
$y = -\frac{5}{2}(x - 20)(x - 100)$ oder $y = -2.5x^2 + 300x - 5'000$		1
oder		
$y = -\frac{5}{2}(x - 60)^2 + 4'000$		
Abzüge:		

## Aufgabe 7

11 Punkte

Sarina hat während zwei Monaten beim Jogging ihre Trainingsdauer erfasst.

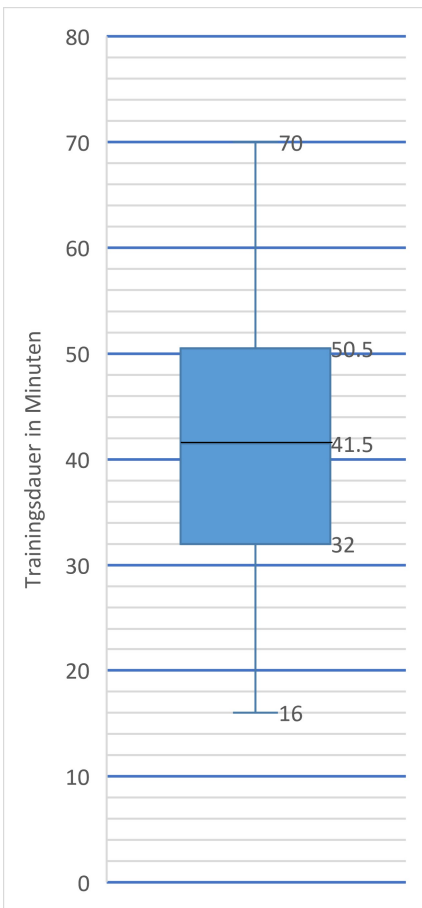
Folgende Werte in Minuten hat sie sich notiert:

16 25 30 31 35 37 38 40 43 46 46 49 51 51 62 70

a) Ermitteln Sie folgende Werte: (5)

Median	41.5
1. Quartil	32
3. Quartil	50.5
Spannweite	54
Interquartilsabstand (IQR)	18.5

b) Erstellen Sie den zugehörigen Boxplot. (3)

Lösungsdetails		Punkte
		3
Abzüge:	Pro Fehler	-1

c) Im dritten Monat kann Sarina folgende Werte in Minuten notieren:

38      39      47      52      64

Bestimmen Sie den Mittelwert. Berechnen Sie die Standardabweichung ( $\sigma$ ) zu diesen fünf Trainingszeiten auf zwei Dezimalstellen genau (Lösungsweg verlangt). (3)

Lösungsdetails		Punkte
<i>Mittelwert <math>\bar{x} = 48 \text{ min}</math></i>		<i>1</i>
<i>Standardabweichung <math>\sigma = \sqrt{\frac{454}{5}} \approx 9.53 \text{ min}</math></i>		<i>1, 1</i>
<i>Abzüge:</i>		

## Aufgabe 8

13 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmengen für folgende Gleichungen. ( $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ )

a)  $\frac{3^{x+4}}{27} = 9^x$  (4)

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$		1
$3^{x+1} = 3^{2x}$		1
$x + 1 = 2x$		1
$x = 1$		1
$\mathbb{L} = \{1\}$		
Abzüge:	Fehlende Lösungsmenge	-1

b)  $x = \sqrt{x-1} + 3$  (6)

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}   x \geq 1\}$		1
$(x-3)^2 = x-1$		1
$x^2 - 7x + 10 = 0$		1
$x_1 = 2$ (Scheinlösung) $x_2 = 5$		1, 1
$\mathbb{L} = \{5\}$		1
Abzüge:	Fehlende Lösungsmenge	-1

c)  $\log_4(x+2) = 0$  (3)

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}   x > -2\}$		1
$4^0 = x+2$		1
$-1 = x$		1
$\mathbb{L} = \{-1\}$		
Abzüge:	Fehlende Lösungsmenge	-1

## Aufgabe 9

9 Punkte

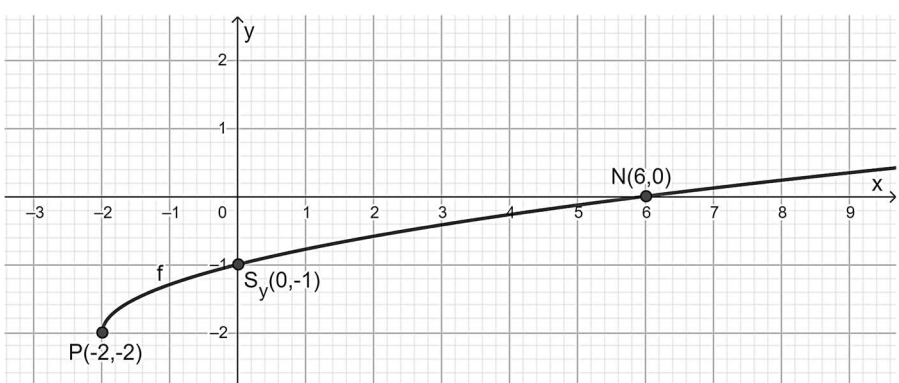
Gegeben ist folgende Funktion  $f: (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ :

$$y = \sqrt{0.5x + 1} - 2$$

a) Berechnen Sie die Schnittpunkte mit der x-Achse und der y-Achse. (3)

Lösungsdetails		Punkte
<i>Schnittpunkt mit der x-Achse:</i> $0 = \sqrt{0.5x + 1} - 2$ $4 = 0.5x + 1$ $3 = 0.5x$ $x = 6 \rightarrow N(6; 0)$ <i>Schnittpunkt mit der y-Achse:</i> $y = \sqrt{0.5 \cdot 0 + 1} - 2 = -1 \rightarrow S(0; -1)$		2
		1
Abzüge:	Lösung nicht als Punkt dargestellt	-1

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion  $f$  in das vorgegebene Koordinatensystem. (4)

Lösungsdetails		Punkte
		4
Abzüge:	Qualität des Graphen ungenügend	-2
	Graph beginnt nicht bei P(-2/-2)	-1
	Fehlende Beschriftungen	-1

c) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  und stellen Sie diese in der Form  $y = \dots$  dar. (2)

Lösungsdetails		Punkte
$x = \sqrt{0.5y + 1} - 2$		1
$(x + 2)^2 = 0.5y + 1$		1
$y = 2x^2 + 8x + 6 \text{ oder } y = 2(x + 2)^2 - 2$		
Abzüge:		

## Aufgabe 10

8 Punkte

Vereinfachen Sie folgende Terme so weit wie möglich.

a) 
$$\frac{\frac{-2x^2 + 24x - 72}{4x - 8}}{\frac{x^2 - 36}{x - 2}} \quad (4)$$

Lösungsdetails		Punkte
$= \frac{-2(x-6)(x-6)}{4(x-2)} \cdot \frac{(x-2)}{(x-6)(x+6)}$		3
$= -\frac{(x-6)}{2(x+6)} \text{ oder } \frac{(6-x)}{2(x+6)}$		1
Abzüge:	Pro Fehler 1 Punkt Abzug	

b) 
$$\frac{\sqrt[3]{a \cdot b \cdot \sqrt[3]{ab^3}}}{\sqrt[9]{a^4 \cdot b^{-3}}} \quad (4)$$

Lösungsdetails		Punkte
$= a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{9}} \cdot b^{\frac{3}{9}} \cdot a^{\frac{-4}{9}} \cdot b^{\frac{3}{9}}$		2
$= a^0 \cdot b^1$		1
$= b$		1
Abzüge:		