

Mathematik

Serie 1a - Lösungen

Prüfungsdauer: 150 Minuten

Max. Punktezahl: 100 Punkte

Bewertungshinweise:

Mehrfachlösungen sind nicht gestattet.

Als Resultate gelten nur eindeutig gekennzeichnete Zahlen, Mengen oder Sätze.

Die Diagramme müssen korrekt beschriftet sein.

Bei fehlenden Antwortsätzen oder Lösungsmengen werden Punkte abgezogen.

Bei den einzelnen Ausrechnungsteilschritten gilt allgemein:

1. Fehler: Abzug von 50% der maximalen Punktzahl dieses Teilschritts
2. Fehler: 0 Punkte für diesen Teilschritt

Es gibt keine halben Punkte.

Ist bei grafischen Lösungen die zugrunde liegende Funktionsgleichung falsch, diese falsche Funktion jedoch korrekt gezeichnet, müssen die Punkte für die grafische Darstellung gegeben werden.

Als Grundlage gilt das Dokument „Mathematik: Hinweise zur Lösungsdarstellung“ vom 02.12.1998

Dieser Lösungs- und Bewertungsschlüssel darf nur von Mathematik-Lehrenden kaufmännischer Berufsschulen verwendet werden. Insbesondere darf er in späteren Jahren im Unterricht zu Übungszwecken nicht 1:1 kopiert und an Lernende abgegeben werden. Jede weitere Verwendung der Originalprüfung wie auch dieses Schlüssels bedarf der Bewilligung der Kommission Kaufmännische Berufsmatura, Kt. ZH. Kommerzielle Verwendung - auch nur auszugsweise - bleibt untersagt.

Aufgabe 1

10 Punkte

- a) Joëlle hat Ende Lehre CHF 5'000.00 auf einem Konto angelegt. 35 Jahre später liegen auf diesem Konto CHF 12'278.00. Wie hoch war der durchschnittliche Zinssatz während dieser langen Zeit? (2)

Lösungsdetails		Punkte
$q = \sqrt[35]{\frac{12278}{5000}} = 1.026$		1
$p = 2.6$		1
Der durchschnittliche Zinssatz betrug 2.6%.		
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	-1

- b) Ein Transportunternehmen kauft einen neuen Sattelschlepper für CHF 750'000.00. Gemäss den internen Vorgaben muss dieser die ersten 3 Jahre mit 18% degressiv abgeschrieben werden, anschliessend weiterhin degressiv mit 12%. Nach wie vielen ganzen Jahren fällt sein Bilanzwert unter CHF 50'000.00? (4)

Lösungsdetails		Punkte
Nach 3 Jahren: $K = 750'000 \cdot 0.82^3 = 413'526$		1
$n = \frac{\log 50000 - \log 413526}{\log 0.88} = 16.527$		2
$3 + 17 = 20$		1
Der Sattelschlepper steht nach 20 Jahren mit unter CHF 50'000.00 in der Buchhaltung.		
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	

- c) Tante Hilaria schenkt ihrer Nichte Anna einen Betrag als Erbvorbezug, den diese zu einem Zinssatz von 1.3% anlegt. Nach 10 Jahren schenkt die Tante ihrer Nichte erneut denselben Betrag, den sie auch zu 1.3% anlegen kann. Nach weiteren fünf Jahren verfügt Anna über CHF 34'207.45. Wie gross war der ursprünglich geschenkte Betrag? (4)

Lösungsdetails		Punkte
$(x \cdot 1.013^{10} + x) \cdot 1.013^5 = 34'207.45$		2
$x = 15'000$		2
Anna erhielt ursprünglich CHF 15'000.00.		
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	

Aufgabe 2

16 Punkte

Eine quadratische Funktion f_1 weist die Gleichung $y = x^2 + 6x + 8$ auf.

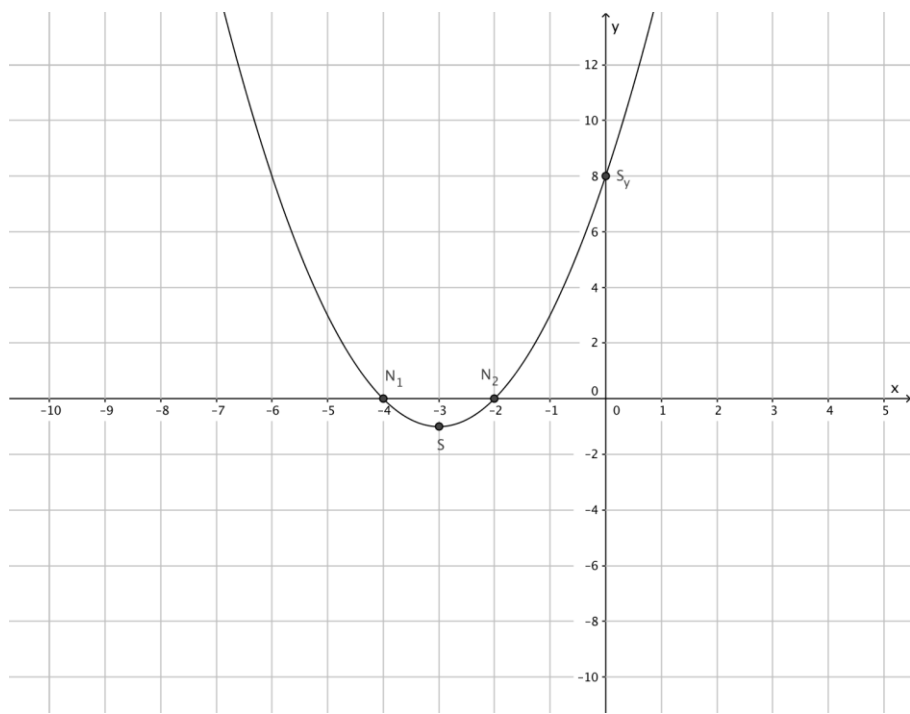
a) Bestimmen Sie allfällige Nullstellen sowie den Schnittpunkt mit der y-Achse. (3)

Lösungsdetails		Punkte
$\text{Nullstellen: } 0 = x^2 + 6x + 8$ $0 = (x + 2)(x + 4)$ $N_1 (-2 / 0) \quad N_2 (-4 / 0)$ $y\text{-Achsen Schnittpunkt: } (0 / 8) \quad \text{oder} \quad S_y (0 / 8)$		2
		1
Abzüge:	Y-Achsen Schnittpunkt nicht korrekt dargestellt	-1

b) Berechnen Sie den Scheitelpunkt. (2)

Lösungsdetails		Punkte
$S_x: (-2 + (-4)) : 2 = -3$ $S_y: y = 3^2 + 6 \cdot (-3) + 8 = -1$ $\text{Scheitelpunkt: } S (-3 / -1)$		2
Abzüge:	keine Koordinatendarstellung	-1

c) Stellen Sie die Funktion f_1 grafisch dar und kennzeichnen Sie alle berechneten Punkte. (4)

Lösungsdetails		Punkte
		4
Abzüge:	Fehlende Punktebeschriftungen (max. -2)	-1
	Fehlende Achsenbeschriftungen	-1

- d) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Funktion $f_1: y = x^2 + 6x + 8$ mit einer zweiten Funktion $f_2: y = \frac{1}{2}x^2 - 2$. (4)

Lösungsdetails		Punkte
$\frac{1}{2}x^2 - 2 = x^2 + 6x + 8$ $x^2 + 12x + 20 = 0$ $(x + 2)(x + 10) = 0$ $x_1 = -2 \quad x_2 = -10$ $y_1 = 0 \quad y_2 = 48$ $S_1(-2/0) \quad S_2(-10/48)$		 2 2
Abzüge:	keine Koordinatendarstellung	-1

- e) Die Parabel f_1 wird an der x-Achse gespiegelt. Bestimmen Sie die Parameter a, b und c der neuen Funktionsgleichung. (3)

Lösungsdetails		Punkte
$a = -1, \quad b = -6, \quad c = -8$ $\text{oder } y = -x^2 - 6x - 8$		Je 1

Aufgabe 3

12 Punkte

- a) Ermitteln Sie die Definitions- und Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems.

$$\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

(6)

$$(1) \quad \frac{5}{x} = \frac{3}{y-5}$$

$$(2) \quad \frac{x+11y}{5} - \frac{9(y+2)}{4} = -\frac{1}{2}$$

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D}_x = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{D}_y = \mathbb{R} \setminus \{5\}$		2
$5y - 25 = 3x$		1
$4x - y = 80$		1
$x = 25$		1
$y = 20$		1
$\mathbb{L} = \{(25/20)\}$		
Abzüge:	Lösungsmenge nicht korrekt oder fehlend	-1

- b) Eva und ihre Grossmutter Josephine sind heute zusammen 108 Jahre alt. In 6 Jahren wird Josephine dreimal so alt sein wie Eva. Wie alt sind die beiden heute? Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe einer Gleichung oder eines Gleichungssystems. (6)

Lösungsdetails		Punkte
x: Alter Eva heute in Jahren, y: Alter Josephine heute in Jahren		
$x + y = 108$		2
$3(x + 6) = y + 6$		2
$x = 24, y = 84$		je 1
Eva ist 24 Jahre alt, ihre Grossmutter ist 84 Jahre alt.		
Abzüge:	Keine Variablendefinition	-1
	Kein Antwortsatz	-1

Aufgabe 4

15 Punkte

Bei der Produktion von Design-Liegestühlen fallen fixe Kosten von CHF 20'000.00 an. Werden 500 Liegestühle produziert, belaufen sich die Gesamtkosten auf CHF 95'000.00.

a) Bestimmen Sie die Kostenfunktion.

(2)

Lösungsdetails		Punkte
<i>Kosten: $y = 150x + 20'000$</i>		2
Abzüge:	<i>Keine Funktionsgleichung</i>	-1

b) Zu welchem Preis muss ein Liegestuhl verkauft werden, damit die Gewinnschwelle bei 800 Stück liegt? Bestimmen Sie ebenfalls die Erlösfunktion.

(2)

Lösungsdetails		Punkte
$y = 150x + 20'000 = 150 \cdot 800 + 20'000 = 140'000$		1
$m = 175$		
Ein Liegestuhl muss für CHF 175 verkauft werden.		1
Erlös: $y = 175x$		
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	-1

c) Tragen Sie die Kosten- und Erlösfunktion beschriftet in unten stehendes Koordinatensystem ein.

(3)

Lösungsdetails		Punkte
		<i>K: 2</i> <i>E: 1</i>
Abzüge:	<i>Fehlende Beschriftung</i>	-1

- d) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion und tragen Sie diese in obiges Koordinatensystem ein. (4)

Lösungsdetails		Punkte
<i>Gewinn: $y = 25x - 20'000$</i>		2
<i>Grafik</i>		2
<i>Abzüge:</i>	<i>Keine vollständige Funktionsgleichung</i>	-1

- e) Aufgrund der gestiegenen Nachfrage werden die Produktionszahlen erhöht. Das führt dazu, dass die variablen Produktionskosten ab 600 Liegestühlen für jeden zusätzlichen Liegestuhl um einen Sechstel sinken. Bestimmen Sie die neue Kostenfunktion für Produktionszahlen ab 600 Stühlen und tragen Sie diese ebenfalls ins Koordinatensystem von Aufgabe 4c) ein. (3)

Lösungsdetails		Punkte
<i>Kosten neu: $y = 125x + 35'000$ ($x > 600$)</i>		2
<i>Grafik</i>		1
<i>Abzüge:</i>	<i>Keine vollständige Funktionsgleichung</i>	-1

- f) Die Liegestühle werden weiterhin zum gleichen Preis verkauft. Wo liegt die neue Gewinnschwelle? (1)

Lösungsdetails		Punkte
<i>Neue Gewinnschwelle: $125x + 35'000 = 175x$</i> <i>$x = 700$</i> <i>Die neue Gewinnschwelle liegt bei 700 Liegestühlen.</i>		<i>1</i>
<i>Abzüge:</i>	<i>Fehlender oder falscher Antwortsatz</i>	<i>-1</i>

Aufgabe 5

17 Punkte

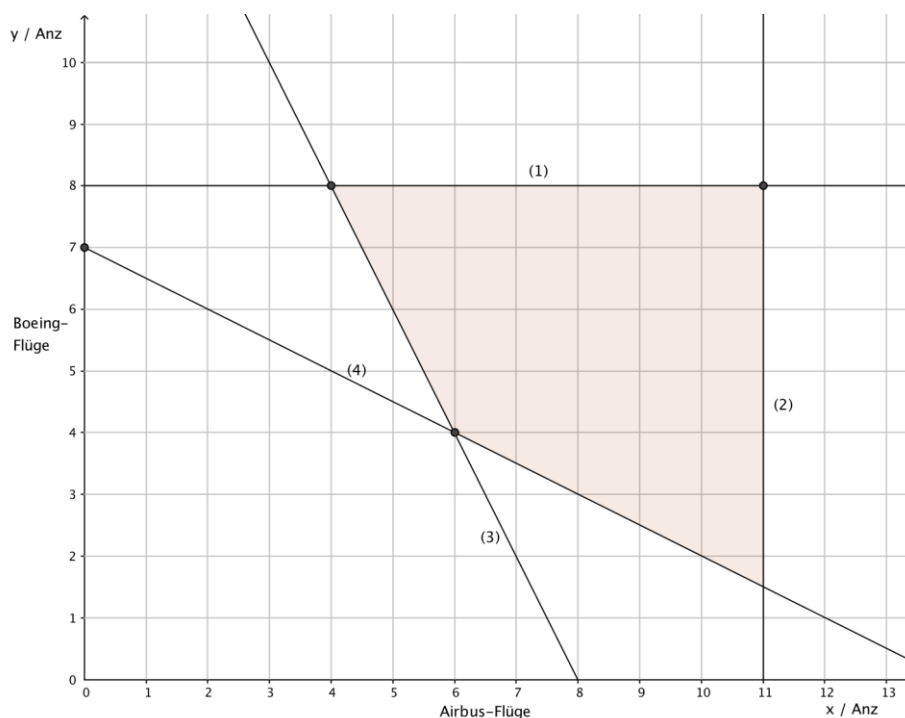
Die Fluggesellschaft Eco-Air plant eine neue Flugverbindung zwischen zwei Städten. Pro Woche sollen mindestens 1'500 Personen und 92 Tonnen Fracht transportiert werden. Es stehen höchstens 12 Airbus-Flüge (x) mit je 180 Sitzplätzen und je 6.5 Tonnen Frachtkapazität und höchstens 9 Boeing-Flüge (y) mit je 125 Sitzplätzen und je 13 Tonnen Frachtkapazität zur Verfügung. Aus betriebswirtschaftlichen Gründen müssen mindestens doppelt so viele Boeing-Flüge wie Airbus-Flüge geplant werden.

Eco-Air rechnet pro Flug mit dem Airbus mit Kosten von CHF 38'000.00 und mit der Boeing mit Kosten von CHF 12'500.00 pro Flug.

- a) Erstellen Sie das lineare Programm (x = Anzahl Airbus-Flüge, y = Anzahl Boeing-Flüge) und formulieren Sie die Zielfunktion für die Kosten. **Ohne Grafik!** (7)

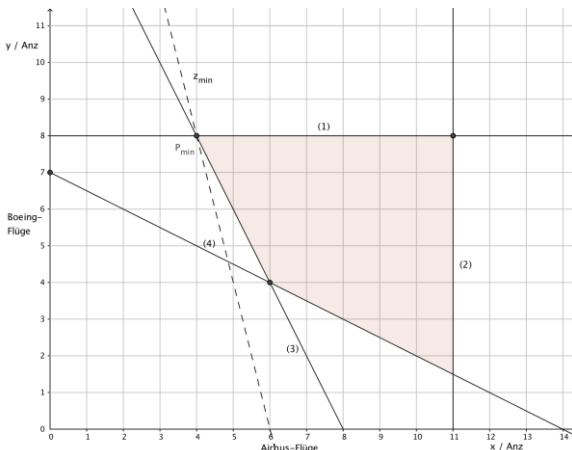
Lösungsdetails	Punkte
(1) $x \leq 12$	1
(2) $y \leq 9$	1
(3) $180x + 125y \geq 1500$	1
(4) $6.5x + 13y \geq 92$	1
(5) $2x \leq y$	2
(z) $z = 38000x + 12500y$	1
Abzüge:	

- b) Für eine andere Destination präsentiert sich das lineare Programm mit folgender Grafik: Stellen Sie die Ungleichungen (1) bis (4) auf. (5)



Lösungsdetails		Punkte
(1)	$y \leq 8$	1
(2)	$x \leq 11$	1
(3)	$y \geq -2x + 16$	2
(4)	$y \geq -0.5x + 7$	1
Abzüge:	Fehlende oder falsche Anordnungszeichen	Max. -2

- c) Die Zielfunktion lautet $z = 40'000x + 10'000y$. Tragen Sie die Zielfunktion für minimale Kosten in der Grafik von Aufgabe 5b) ein und beschriften Sie das Optimum. (2)

Lösungsdetails		Punkte
<p>(z) $y = -4x$</p> 		z_{min} 1 P_{min} 1
Abzüge:	Keine Beschriftungen von P_{min}/z_{min}	-1

- d) Wie viele Flüge mit dem jeweiligen Flugzeugtyp sind zu planen, um minimale Kosten zu erreichen? (2)

Lösungsdetails		Punkte
$P_{min} (4 / 8) \quad x = 4, y = 8$ 4 Airbus-Flüge und 8 Boeing-Flüge sind zu planen.		2
Abzüge:	Kein Antwortsatz	-1

- e) Berechnen Sie die minimalen Kosten. (1)

Lösungsdetails		Punkte
$z_{min} = 40'000x + 10'000y$ $z_{min} = 160'000 + 80'000 = 240'000$ Die minimalen Kosten liegen bei CHF 240'000.		1
Abzüge:	Kein Antwortsatz	-1

Aufgabe 6

11 Punkte

- a) Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge für die Variable x . ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$) (6)

$$\frac{x}{2x-4} - \frac{4}{x+2} = \frac{1}{x-2}$$

Lösungsdetails	Punkte
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$	1
$x(x+2) - 8(x-2) = 2(x+2)$	
$x^2 - 8x + 12 = 0$	2
$x_1 = 6; x_2 = 2$	2
$\mathbb{L} = \{6\}$	1
Abzüge:	

- b) Schreiben Sie die Gleichung in die Normalform um und bestimmen Sie anschliessend die Lösungsmenge für die Variable x . ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$) (5)

$$\frac{x^2}{m} + 8x = 9m$$

Lösungsdetails	Punkte
$x^2 + 8mx - 9m^2 = 0$ (oder $\frac{x^2}{m} + 8x - 9m = 0$)	1
$a = 1; b = 8m; c = -9m^2$ oder $p = 8m; q = -9m^2$ oder faktorisieren	2
$x_1 = -9m; x_2 = m$	2
$\mathbb{L} = \{-9m; m\},$ wobei $m \neq 0$	
Abzüge:	Keine Lösungsmenge (Nebenbedingung wird nicht verlangt)
	-1

Aufgabe 7

8 Punkte

Vereinfachen Sie die Terme so weit wie möglich.

a) $\sqrt[15]{a^{26}} : \left(a \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{5}}\right)$ (2)

Lösungsdetails	Punkte
$a^{\frac{26}{15}} : \left(a^{\frac{15}{15}} \cdot a^{\frac{5}{15}} \cdot a^{\frac{6}{15}}\right) = 1$	2
Abzüge:	

b) $\frac{2a^2 - 20a + 50}{a^2 - a - 20}$ (3)

Lösungsdetails	Punkte
$\frac{2(a-5)(a-5)}{(a-5)(a+4)}$	2
$\frac{2(a-5)}{(a+4)}$	1
Abzüge:	

c) $\frac{2x+2}{\frac{x^2-1}{3+3x}} = \frac{1-x^2}{1-x^2}$ (3)

Lösungsdetails	Punkte
$\frac{\frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)}}{\frac{3(1+x)}{(1+x)(1-x)}}$	1
$\frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(1+x)(1-x)}{3(1+x)}$	1
$-\frac{2}{3}$	1
Abzüge:	

Aufgabe 8

11 Punkte

Bestimmen Sie die Lösungsmengen für x der folgenden vier Gleichungen.

a) $\log_{2x}(216) = 3$ (2)

Lösungsdetails		Punkte
$(2x)^3 = 216$ $x = 3$ $\mathbb{L} = \{3\}$		1 1
Abzüge:	Keine Lösungsmenge	-1

b) $\log_4(64x) = 7$ (2)

Lösungsdetails		Punkte
$4^7 = 64x$ $x = 256$ $\mathbb{L} = \{256\}$		1 1
Abzüge:	Keine Lösungsmenge	-1

c) $2^x \cdot 2^{x+2} = 16$ (3)

Lösungsdetails		Punkte
$2^{2x+2} = 2^4$		1
$2x + 2 = 4$		1
$x = 1$		1
$\mathbb{L} = \{1\}$		
Abzüge:	Keine Lösungsmenge	-1

d) $2^x \cdot \frac{3}{5^{2-x}} = 12'000'000$ (4)

Lösungsdetails		Punkte
$x \lg(2) + \lg(3) - (2 - x) \lg(5) = \lg(12'000'000)$		2
$x = 8$		2
$\mathbb{L} = \{8\}$		
Abzüge:	Keine Lösungsmenge	-1